০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Polynomial and Polynomial Equation

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

১। $f(x)$ একটি বহুপদী এবং $f(a) = 0$ হলে $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

২। $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে $f(a)$ ভাগশেষ নির্দেশ করে।

৩। $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

৪। $D = b^2 - 4ac$ কে নিশ্চায়ক বা পৃথায়ক বলে।

(i) $D = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে

(ii) $D > 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে

(a) D পূর্ণবর্গ হলে মূলদ্বয় মূলদ হবে

(b) D পূর্ণবর্গ না হলে মূলদ্বয় অমূলদ হবে

(iii) $D < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল ও অনুবন্ধী হবে।

৫। $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

৬। $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

৭। $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয়, α, β ও γ হলে, $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$,

$$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

৮। (i) α ও β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

(ii) α, β ও γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ,

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

৯। ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূলগুলো

(i) সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে মূলগুলো $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ আকারের হবে

(ii) গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে মূলগুলো $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ আকারের হবে

(iv) ভাজিত/Harmonic/সমান্তর প্রগমনের গুণাত্মক বিপরীত হলে $\frac{1}{\alpha - d}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha + d}$ আকারের হবে

১০। $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ $(a_1 \neq 0)$ ও $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ $(a_2 \neq 0)$ সমীকরণদ্বয়ের দুইটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

১১। $ax^2 + bx + c$ রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান $= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ হবে। $a > 0$ হলে সর্বনিম্ন ও $a < 0$ হলে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।

১২। $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে,

(i) $-\alpha, -\beta, -\gamma$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(-x) = 0$

(ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(iii) $\alpha + k, \beta + k, \gamma + k$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x - k) = 0$

(iv) $\alpha - k, \beta - k, \gamma - k$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x + k) = 0$

সৃজনশীল (খ + গ) এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নোত্তর

1. p এর মান কত হলে $(3p + 1)x^2 + (11 + p)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় (i) বাস্তব ও সমান (ii) বাস্তব ও অসমান (iii) জটিল হবে?

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক, $D = (11 + p)^2 - 4 \times (3 + 1) \times 9$

$= 121 + 22p + p^2 - 108p - 36$

$= p^2 - 86p + 85$

$= (p - 1)(p - 85)$

(i) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, $D = 0$

$\Rightarrow (p - 1)(p - 85) = 0$

$\Rightarrow p = 1, 85$ **(Ans.)**

(ii) মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, $D > 0$

$\Rightarrow (p - 1)(p - 85) > 0$

$\Rightarrow p > 85$ অথবা $p < 1$ **(Ans.)**

(iii) মূলদ্বয় জটিল হলে, $D < 0$

$\Rightarrow (p - 1)(p - 85) < 0$

$\Rightarrow 1 < p < 85$ **(Ans.)**

2. যদি $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হয়, তবে দেখাও যে, $a = b = c$ [কু. বো. ১৫]

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$

$= 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca)$

এখন,প্রদত্ত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ সমীকরণটির পৃথায়ক শূন্য হয়।

$\therefore$ পৃথায়ক, $D = \{-2(a + b + c)\}^2 - 4 \times 3 \times (ab + bc + ca)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc - 3ca)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= 2(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

পৃথায়কটি তিনটি বর্গের যোগফল। অর্থাৎ, প্রতিটি বর্গ পৃথকভাবে শূন্য।

$\therefore (a - b)^2 = 0, (b - c) = 0, (c - a)^2 = 0$

$\Rightarrow a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

$\Rightarrow a = b, b = c, c = a$

$\therefore a = b = c$ **(Showed)**

3. যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$

[ঢা. বো. ১৫, ১৩, ০৩; য. বো. ১১; ব. বো. ১০; দি. বো. ০৯; চ. বো. ০৩]

সমাধান: ধরি, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = p$

$\Rightarrow 2\alpha = p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{p - 1}{2}$ ..... (i)

এবং $\alpha(\alpha + 1) = q$

$\Rightarrow \left(\frac{p - 1}{2}\right)\left(\frac{p - 1}{2} + 1\right) = q$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow \left(\frac{p - 1}{2}\right)\left(\frac{p + 1}{2}\right) = q$

$\Rightarrow \frac{p^2 - 1}{4} = q$

$\Rightarrow p^2 - 1 = 4q$

$\therefore p^2 - 4q - 1 = 0$ **(Proved)**

4. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং অশূন্য হলে দেখাও যে, $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2 + c^2}$ [RUET 15-16, 07-08; ম. বো. ২১; ঢা. ববো. ১১; চ. বো. ১২, ১০; সি.বো. ০৮; রা. বো. ০৯; কু. বো. ০৭; ব. বো. ০৪]

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ..... (i) এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ..... (ii)

(i) নং থেকে পাই, $a\alpha + a\beta = -b$

$\Rightarrow a\alpha + b = -\alpha\beta$ ..... (iii)

$\Rightarrow a\beta + b = -a\alpha$ ..... (iv)

$L.H.S = (a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$

$= \frac{1}{(a\alpha + b)^2} + \frac{1}{(a\beta + b)^2}$

$= \frac{1}{(-a\beta)^2} + \frac{1}{(-a\alpha)^2}$ [(iii) ও (iv) নং হতে]

$= \frac{1}{a^2\beta^2} + \frac{1}{a^2\alpha^2}$

$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{a^2\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{a^2 \times \frac{c^2}{a^2}}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{1}{c^2}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2} = R.H.S$

$\therefore (a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$ **(Showed)**

5. যদি $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত $m : n$ হয় তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$ [দি. বো. ১৫, ১২; সি. বো. ১৫, ১২; চ. বো. ১৫, ০৯; রা. বো. ১৪, ১২; কু. বো. ১৪, ১০, ০৭, ০২; য. বো. ১৪; মা. বো. ১১, ০৮, ০৪; ব. বো. ০৯, ০৩; ঢা. বো. ০৮; RUET 08-09]

সমাধান: ধরি, $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{q}{p}$

প্রশ্নমতে, $\alpha : \beta = m : n \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$

$L.H.S = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$

$= \sqrt{\frac{\alpha}{b}} + \sqrt{\frac{b}{\alpha}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$

$= \frac{\alpha + b}{\sqrt{\alpha b}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$

$= \frac{-\frac{q}{p}}{\sqrt{\frac{q}{p}}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$

$= -\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$

$= 0 = \text{R.H.S}$

$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$ **(Showed)**

6. a, b বাস্তব হলে দেখাও যে, $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে; যদি সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, a = 2b অথবা 4a = 11b

[রা. বো. ১৫, ০৪; সি. বো. ১৪, ০৬; চ. বো. ১০; ঢা. বো. ০১]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ: $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$

$\Rightarrow 2bx^2 + 2(a + b)x + 3a - 2b = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক, $D = \{2(a + b)\}^2 - 4 \times 2b \times (3a - 2b)$

$= 4(a + b)^2 - 24ab + 16b^2$

$= 4(a^2 + 2ab + b^2) - 24ab + 16b^2$

$= 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 24ab + 16b^2$

$= 4a^2 - 16ab + 20b^2$

$= 4(a^2 - 4ab + 5b^2)$

$= 4(a^2 - 4ab + 4b^2 + b^2)$

$= 4\{(a - 2b)^2 + b^2\}$; ইহা একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ মূলগুলো বাস্তব হবে। **(Showed)**

ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং 2α

$\therefore \alpha + 2\alpha = \frac{-2(a + b)}{2b}$

$\Rightarrow 3\alpha = -\frac{a + b}{b} \Rightarrow \alpha = -\frac{(a + b)}{3b}$ .....(i)

এবং $\alpha \times 2\alpha = \frac{3a - 2b}{2b}$

$\Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$

$\Rightarrow 2\left\{\frac{-(a + b)}{3b}\right\}^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow \frac{2(a + b)^2}{9b^2} = \frac{3a - 2b}{2b}$

$\Rightarrow \frac{2(a + b)^2}{9b} = \frac{3a - 2b}{2}$

$\Rightarrow 4(a + b)^2 = 9b(3a - 2b)$

$\Rightarrow 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$

$\Rightarrow 4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 8ab - 11ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow 4a(a - 2b) - 11b(a - 2b) = 0$

$\Rightarrow (a - 2b)(4a - 11b) = 0$

হয় $a - 2b = 0$ অথবা $4a - 11b = 0$

$\therefore a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$ **(Proved)**

7. যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলগুলির মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, b + c + 4 = 0

[য. বো. ১৩, ০৮; সি. বো., কু. বো. ১২, ০৯; ঢা. বো. ১০; মা. বো. ০৬; ব. বো. ০৪; চ. বো. ০১]

সমাধান: মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α এবং β $(\alpha > \beta)$

$\therefore \alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$

আবার, $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয় γ এবং δ $(\gamma > \delta)$

$\gamma + \delta = c$ এবং $\gamma\delta = b$

প্রশ্নমতে, $\alpha - \beta = \gamma - \delta = k$

$\Rightarrow \alpha - \beta = \gamma - \delta$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$

$\Rightarrow b^2 - 4c = c^2 - 4b$

$\Rightarrow b^2 - c^2 + 4(b - c) = 0$

$\Rightarrow (b + c)(b - c) + 4(b - c) = 0$

$\Rightarrow (b - c)(b + c + 4) = 0$

$\therefore b + c + 4 = 0$ $[\because b \neq c]$ **(Proved)**

8. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[সি. বো. ২৩; রা. বো. ২১; চ. বো. ১৭]

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -b$ এবং $\alpha\beta = c$

এখন, $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$

$\Rightarrow cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

9. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{q}{p - \alpha}$ ও $\frac{q}{p - \beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণের অভিন্নতার কারণ ব্যাখ্যা কর।

সমাধান: $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α ও β

$\therefore \alpha + \beta = p$ এবং $\alpha\beta = q$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{q}{p - \alpha}$ ও $\frac{q}{p - \beta}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{q}{p - \alpha} + \frac{q}{p - \beta}$

$= \frac{q(p - \beta) + q(p - \alpha)}{(p - \alpha)(p - \beta)}$

$= \frac{2qp - q(\alpha + \beta)}{p^2 - p(\alpha + \beta) + \alpha\beta}$

$= \frac{2qp - pq}{p^2 - p^2 + q} = \frac{pq}{q} = p$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{q}{p - \alpha} \times \frac{q}{p - \beta}$

$= \frac{q^2}{(p - \alpha)(p - \beta)}$

$= \frac{q^2}{q}$

$= q$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - px + q = 0$ **(Ans.)**

নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ অভিন্ন হওয়ার কারণ তাদের মূলদ্বয়ের যোগফল ও মূলদ্বয়ের গুণফল পরস্পর সমান। **(Ans.)**

10. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে এরূপ এবং অখন্ড সহগবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার মূল $\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}$ ও $\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ হবে।

সমাধান: $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{5}{7}$ এবং $\alpha\beta = -\frac{3}{7}$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}$ এবং $\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) + \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$$= \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta}$$

$$= 4\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)$$

$$= 4 \times \frac{\frac{5}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{20}{3}$$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) \times \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$$= \frac{(\beta + 3\alpha)(3\beta + \alpha)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{3\beta^2 + \alpha\beta + 9\alpha\beta + 3\alpha^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{3(\alpha^2 + \beta^2) + 10\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{3\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 10\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{3(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{3 \times \frac{25}{49} - 4 \times \frac{3}{7}}{\frac{9}{49}} = \frac{\frac{-9}{49}}{\frac{9}{49}} = -1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - \left(-\frac{20}{3}\right)x + (-1) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{20x}{3} - 1 = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 20x - 3 = 0 \textbf{ (Ans.)}$$

11. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{\alpha}{\beta^2}$ ও $\frac{\beta}{\alpha^2}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta^2}$ ও $\frac{\beta}{\alpha^2}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \times \frac{a^2}{c^2} = \frac{3abc - b^3}{ac^2}$$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{\alpha}{\beta^2} \times \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - \frac{3abc - b^3}{ac^2}x + \frac{a}{c} = 0$

$$\Rightarrow ac^2x^2 - (3abc - b^3)x + a^2c = 0$$

$$\Rightarrow ac^2x^2 + (b^3 - 3abc)x + a^2c = 0$$

$$\therefore ac^2x^2 + b(b^2 - 3ac)x + a^2c = 0 \textbf{ (Ans.)}$$

12. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{1}{\alpha - 4\beta}$ ও $\frac{1}{\beta - 4\alpha}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha - 4\beta}$ ও $\frac{1}{\beta - 4\alpha}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{\alpha - 4\beta} + \frac{1}{\beta - 4\alpha}$

$$= \frac{\beta - 4\alpha + \alpha - 4\beta}{(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha)}$$

$$= \frac{-3(\alpha + \beta)}{\alpha\beta - 4(\alpha^2 + \beta^2) + 16\alpha\beta}$$

$$= \frac{-3(\alpha + \beta)}{17\alpha\beta - 4\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}}$$

$$= \frac{-3(\alpha + \beta)}{25\alpha\beta - 4(\alpha + \beta)^2}$$

$$= \frac{3\frac{b}{a}}{25\frac{c}{a} - 4\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{3b}{a} \times \frac{a^2}{25ac - 4b^2}$$

$$= \frac{3ab}{25ac - 4b^2}$$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{\alpha - 4\beta} \times \frac{1}{\beta - 4\alpha}$

$$= \frac{1}{25\alpha\beta - 4(\alpha + \beta)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{25c}{a} - \frac{4b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{25ac - 4b^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - \frac{3ab}{25ac - 4b^2}x + \frac{a^2}{25ac - 4b^2} = 0$

$$\Rightarrow (25ac - 4b^2)x^2 - 3abx + a^2 = 0 \textbf{ (Ans.)}$$

13. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ও $\sqrt{\alpha\beta}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ও $\sqrt{\alpha\beta}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta}$

$= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

$= \frac{-b + 2\sqrt{ac}}{2a}$

$= -\frac{b - 2\sqrt{ac}}{2a}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \times \sqrt{\alpha\beta}$

$= -\frac{b}{2a} \times \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{-b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 + \left(\frac{b - 2\sqrt{ac}}{2a}\right)x - \frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$

$\Rightarrow 2a\sqrt{a}x^2 + \left(b\sqrt{a} - 2a\sqrt{c}\right)x - b\sqrt{c} = 0$ **(Ans.)**

14. $mx^2 + nx + l$ এবং $lx^2 + nx + m = 0$ সমীকরণের একটি মূল সাধারণ থাকে, তবে দেখাও যে, $(l + m)^2 = n^2$ অথবা, $l + m = \pm n$

[ম. বো. ২৫; য. বো. ২৫; অনুরূপ প্রশ্ন: ব. বো. ২৫, ২৩; চ. বো. ২৫; রা. বো. ২২, ১৯; দি. বো. ২২; ঢা. বো. ১৭]

সমাধান: মনে করি, সাধারণ মূলটি α যা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ .....(i)

এবং $l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$ .....(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$\frac{\alpha^2}{mn - ln} = \frac{\alpha}{l^2 - m^2} = \frac{1}{mn - ln}$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে,

$\alpha = \frac{l^2 - m^2}{mn - ln} = \frac{(l+m)(l-m)}{-n(l-m)} = \frac{-(l+m)}{n}$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$\alpha = \frac{mn - ln}{l^2 - m^2} = \frac{-n(l-m)}{(l+m)(l-m)} = \frac{-n}{l+m}$

α এর মানদ্বয় হতে, $\frac{-(l+m)}{n} = \frac{-n}{l+m}$

$\Rightarrow (l + m)^2 = n^2$ **(Showed)**

$\therefore l + m = \pm n$ **(Showed)**

15. $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$ [ঢা. বো. ১১, ১৪, ১৭; ব. বো. ১১, কু. বো. ০৫; য. বো. ০৬, ১১; সি. বো. ০৭; ম. বো. ১৯; রা. বো. ২৩]

সমাধান: ধরি, $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূল α

এবং $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2α

$\therefore c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ..... (i)

এবং $a(2\alpha)^2 + b(2\alpha) + c = 0$

$\Rightarrow 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ .....(ii)

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে (i) ও (ii) হতে পাই,

$\frac{\alpha^2}{bc - 2ab} = \frac{\alpha}{4a^2 - c^2} = \frac{1}{2bc - 4ab}$

$\therefore (4a^2 - c^2)^2 = (bc - 2ab)(2bc - 4ab)$

$\Rightarrow (2a - c)^2 (2a + c)^2 = b(c - 2a)\, 2b(c - 2a)$

$\Rightarrow (2a - c)^2 (2a + c)^2 - 2b^2 (2a - c)^2 = 0$

$\Rightarrow (2a - c)^2 \{(2a + c)^2 - 2b^2\} = 0$

হয়, $(2a - c)^2 = 0$

$\Rightarrow 2a - c = 0$

$\Rightarrow 2a = c$

অথবা, $(2a + c)^2 - 2b^2 = 0$

$\Rightarrow (2a + c)^2 = 2b^2$

$\therefore 2a = c$ অথবা, $(2a + c)^2 = 2b^2$ **(Showed)**

16. $x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধান: $x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + y = -2;\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1;\ \alpha\beta\gamma = -3$

আবার, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$ ..... (i)

$\beta^3 + 2\beta^2 + \beta + 3 = 0$ ..... (ii)

$\gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 3 = 0$ ..... (iii)

(i) + (ii) + (iii) করে পাই,

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha + \beta + \gamma + 9 = 0$

$\Rightarrow \sum\alpha^3 + 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} + \alpha + \beta + \gamma + 9 = 0$

$\Rightarrow \sum\alpha^3 + 2\{(-2)^2 - 2(1)\} - 2 + 9 = 0$

$\Rightarrow \sum\alpha^3 + 4 + 7 = 0$

$\therefore \sum\alpha^3 = -11$ **(Ans.)**

17. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\Sigma\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২২]

সমাধান: এখানে, $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ ..... (i)

সমীকরণ (i) এর মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{4}{2} = 2$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha$

$= \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta\gamma$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$

$= \frac{3}{2} \times 2 - 3 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}$

$\therefore \sum\alpha^2\beta = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

18. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α,β,γ হলে $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^3}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha+\beta}{\gamma^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২৫; য. বো. ২৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ

এখানে, $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$\Rightarrow \beta + \gamma = -\alpha$

একইভাবে, $\alpha + \beta = -\gamma$, $\alpha + \gamma = -\beta$

আবার, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha^3} = \frac{-\alpha}{\alpha^3} = \frac{-1}{\alpha^2}$

$\therefore \frac{\gamma+\alpha}{\beta^3} = \frac{-\beta}{\beta^3} = \frac{-1}{\beta^2}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\gamma^3} = \frac{-\gamma}{\gamma^3} = \frac{-1}{\gamma^2}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{\beta+\gamma}{\alpha^3} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta^3} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma^3}$

$\therefore \frac{-1}{\alpha^2} + \frac{-1}{\beta^2} + \frac{-1}{\gamma^2} = -\left\{\frac{(\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}\right\}$

$= -\left\{\frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\right\}$

$= -\left\{\frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\right\}$

$= -\frac{q^2}{r^2}$

দুইটি করে মূল নিয়ে যোগফল,

$= \left(\frac{-1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{-1}{\beta^2}\right) + \left(\frac{-1}{\beta^2}\right)\left(\frac{-1}{\gamma^2}\right) + \left(\frac{-1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{-1}{\gamma^2}\right)$

$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$= \frac{0 - 2q}{(-r)^2}$

$= \frac{-2q}{r^2}$

মূলত্রয়ের গুণফল $= \left(\frac{-1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{-1}{\beta^2}\right)\left(\frac{-1}{\gamma^2}\right) = \frac{-1}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{-1}{r^2}$

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha^3}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha+\beta}{\gamma^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ:

$x^3 + \frac{q^2}{r^2}x^2 - \frac{2q}{r^2}x + \frac{1}{r^2} = 0$

$\Rightarrow r^2x^3 + q^2x^2 - 2qx + 1 = 0$ **(Ans.)**

19. একটি মূল অন্য একটি মূলের দ্বিগুণ হলে $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: ধরি, $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, 2\alpha$ এবং β

$\therefore$ মূলত্রয়ের যোগফল $= \alpha + 2\alpha + \beta = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow 3\alpha + \beta = \frac{7}{12}$ ..... (i)

$\therefore$ দুটি করে মূল গুণ করে এদের যোগফল,

$2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha\beta = -\frac{63}{24} = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha\left(\frac{7}{12} - 3\alpha\right) = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow -7\alpha^2 + \frac{7\alpha}{4} = -\frac{21}{8}$

$\Rightarrow -56\alpha^2 + 14\alpha = -21$

$\Rightarrow 8\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$

$\Rightarrow 8\alpha^2 - 6\alpha + 4\alpha - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\alpha(4\alpha - 3) + 1(4\alpha - 3) = 0$

$\Rightarrow (4\alpha - 3)(2\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{3}{4}$ হলে, $2\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = \frac{7}{12} - \frac{9}{4} = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{3}$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $2\alpha = -1$; $\beta = \frac{7}{12} - 3\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{25}{12}$

প্রদত্ত সমীকরণটির মূলগুলোর গুণফল $= -\frac{45}{24} = -\frac{15}{8}$

মূলগুলো $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ এবং $-\frac{5}{3}$ হলে, তাদের গুণফল $= -\frac{15}{8}$

মূলগুলো $-\frac{1}{2}, -1$ এবং $\frac{25}{12}$ হলে, তাদের গুণফল $= \frac{25}{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ এবং $-\frac{5}{3}$ **(Ans.)**

20. মূলগুলি সমান্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত হলে $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ সমাধান কর।

সমাধান: প্রদত্ত ত্রিঘাত সমীকরণ: $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$

ধরি, সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$; যেখানে d = সাধারণ অন্তর

এখন, $(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{-48}{32}$

$\Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

আবার, $(\alpha - d)\alpha(\alpha + d) = -\frac{-3}{32}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + d\right)\left(\frac{1}{2} - d\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} - d^2 = \frac{3}{16}$

$\Rightarrow d^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$

$\therefore d = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলত্রয়: $(\alpha - d), \alpha, (\alpha + d)$

$\equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right), \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$\equiv \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

21. মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত হলে $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণটির সমাধান কর। [কু. বো. ০৪]

সমাধান: প্রদত্ত ত্রিঘাত সমীকরণ: $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$

ধরি, সমীকরণের মূলত্রয় $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$; যেখানে r = সাধারণ অনুপাত

এখন, $\frac{\alpha}{r} \times \alpha \times \alpha r = -\frac{-24}{3}$

$\Rightarrow \alpha^3 = 8$

$\Rightarrow \alpha = 2$

আবার, $\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = -\frac{-26}{3}$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$

$\Rightarrow 3r^2 - 9r - r + 3 = 0$

$\Rightarrow (3r - 1)(r - 3) = 0$

$\therefore r = \frac{1}{3}, 3$

$r = \frac{1}{3}$ হলে মূলত্রয়: $6, 2, \frac{2}{3}$

$r = 3$ হলে মূলত্রয়: $\frac{2}{3}, 2, 6$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলত্রয়: $\frac{2}{3}, 2, 6$ **(Ans.)**

22. $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো সমান্তর প্রগমনের গৌণিক বিপরীত প্রগমনভুক্ত হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২৩]

সমাধান: $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ .....(i)

(i) নং সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমণের গৌণিক বিপরীত প্রগমনভুক্ত হলে, ধরি মূলগুলো $\frac{1}{\alpha - d}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha + d}$

(i) নং সমীকরণের x এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ বসিয়ে পাই,

$6.\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 11\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{6}{x^3} - \frac{11}{x^2} + \frac{6}{x} - 1 = 0$

$\Rightarrow 6 - 11x + 6x^2 - x^3 = 0$

$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ .....(ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনভুক্ত হওয়ায় মূলগুলো $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$\therefore (\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{-6}{1}$

$\Rightarrow 3\alpha = 6$

$\therefore \alpha = 2$

আবার, $(\alpha - d) \times \alpha \times (\alpha + d) = -\frac{-6}{1}$

$\Rightarrow \alpha(\alpha^2 - d^2) = 6$

$\Rightarrow 2(2^2 - d^2) = 6$ [α এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow d^2 = 1$

$\therefore d = \pm 1$

$\alpha = 2, d = 1$ হলে, (ii) এর মূলগুলো,

$= \alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$= 2 - 1, 2, 2 + 1$

$= 1, 2, 3$

আবার,

$\alpha = 2, d = -1$ হলে, (ii) এর মূলগুলো,

$= \alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$= 2 - (-1), 2, 2 + (-1)$

$= 3, 2, 1$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ **(Ans.)**

23. একটি মূল $3 + \sqrt{2}$ হলে $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $3 + \sqrt{2}$; যা অমূলদ সংখ্যা

$\therefore$ অপর মূলটি হবে $3 - \sqrt{2}$

$\therefore$ মূলদ্বয়েল যোগফল $= 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$

$\therefore$ মূলদ্বয়েল গুণফল $= (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7$

$\therefore 3 + \sqrt{2}$ ও $3 - \sqrt{2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $x^2 - 6x + 7 = 0$

এখন, $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 3x^3 + 18x^2 - 21x + 2x^2 - 12x + 14 = 0$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 6x + 7) - 3x(x^2 - 6x + 7) + 2(x^2 - 6x + 7) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 7)(x^2 - 3x + 2) = 0$

সুতরাং, প্রদত্ত চতুর্ঘাত সমীকরণটির অবশিষ্ট মূলদ্বয় হবে $x^2 - 3x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়।

$\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $1, 2, 3 \pm \sqrt{2}$ **(Ans.)**

24. একটি মূল $1 + 2i$ হলে $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 20 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [কু. বো. ১৫]

সমাধান: $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 20 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + 2i$; যা একটি জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ অপর মূলটি হবে $1 - 2i$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= 1 + 2i + 1 - 2i = 2$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$

$\therefore 1 + 2i$ ও $1 - 2i$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $x^2 - 2x + 5 = 0$

এখন, $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 20 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x^3 + 6x^2 - 15x - 4x^2 + 8x - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 2x + 5) - 3x(x^2 - 2x + 5) - 4(x^2 - 2x + 5) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 3x - 4) = 0$

সুতরাং, প্রদত্ত চতুর্ঘাত সমীকরণটির অবশিষ্ট মূলদ্বয় হবে $x^2 - 3x - 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়।

$\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} = 4, -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $1 \pm 2i, 4, -1$ **(Ans.)**

০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Polynomial and Polynomial Equation

বোর্ড পরীক্ষার জন্য গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

1. কোন ফাংশনটি বহুপদী? [সম্মিলিত. বো. '১৮]

ক $2x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ খ $x^2 - \frac{3}{x^2} + 4x + 1$

গ $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ ঘ $2x^2 - x + 1$

উত্তর: ঘ $2x^2 - x + 1$

ব্যাখ্যা: বহুপদী রাশির শর্ত: চলকের ঘাত ঋণাত্মক/ভগ্নাংশ হতে পারবে না। অপশন ঘ তে x এর পাওয়ারে ঋণাত্মক/ভগ্নাংশ নেই। তাই এটিই সঠিক উত্তর।

2. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি নয়? [সি. বো. '২২]

ক $ax^2 + 2hxy + by^2$

খ $2x^2 + 2xy + y^2$

গ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$

ঘ $2x^2 + \frac{2y}{x} + y^2$

উত্তর: ঘ $2x^2 + \frac{2y}{x} + y^2$

ব্যাখ্যা: বহুপদী রাশির শর্ত: চলকের ঘাত ঋণাত্মক/ভগ্নাংশ হতে পারবে না।

$2x^2 + \frac{2y}{x} + y^2 = 2x^2 + 2y\,x^{-1} + y^2$ এখানে ২য় পদে x এর পাওয়ার – 1 তাই এটি বহুপদী রাশি নয়।

3. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণ হওয়ার শর্ত কোনটি? [ঢা. বো. ২৫]

ক $a = 0$ খ $a \neq 0$

গ $b = 0$ ঘ $b \neq 0$

উত্তর: খ $a \neq 0$

ব্যাখ্যা: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণ দ্বিঘাত হওয়ার শর্ত $a \neq 0$

4. p এর মান কত হলে, $x^2 - px + p + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে? [কু. বো. ২৫]

ক $p = -2, 6$ খ $p \geq -2$

গ $-2 < p < 6$ ঘ $p < -2$ অথবা $p > 6$

উত্তর: ঘ $p < -2$ অথবা $p > 6$

ব্যাখ্যা: $x^2 - px + p + 3 = 0$

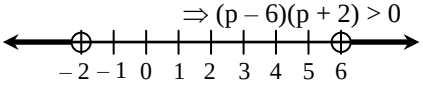
নিশ্চায়ক $D = p^2 - 4(p + 3)$

$= p^2 - 4p - 12$

$= (p - 6)(p + 2)$

মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে যখন, $D > 0$

$\Rightarrow (p - 6)(p + 2) > 0$



$\therefore p < -2$ অথবা $p > 6$

5. $2x^2 - 5x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হবে– [কু. বো. '২৩]

ক বাস্তব ও সমান খ বাস্তব ও অসমান

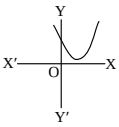
গ জটিল ও সমান ঘ জটিল ও অসমান

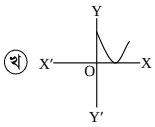
উত্তর: ঘ জটিল ও অসমান

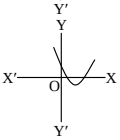
ব্যাখ্যা: $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7 < 0$

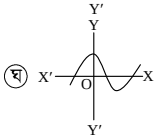
$\therefore$ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান।

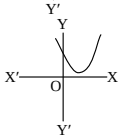
6. $x^2 - 7x + 7 = 0$ এর নিশ্চায়ক ঋণাত্মক। নিচের কোন লেখচিত্রটি সঠিক? [য. বো. ২৫]

ক 

খ 

গ 

ঘ 

উত্তর: ক 

ব্যাখ্যা: নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হলে মূলদ্বয় কাল্পনিক সংখ্যা হবে অর্থাৎ লেখচিত্র x অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করবে না।

বি.দ্র.: প্রকৃতপক্ষে প্রদত্ত ফাংশনের নিশ্চায়ক, $D = 7^2 - 4.7 = 21 > 0$ তবে, প্রশ্নে যেহেতু নিশ্চায়ক ঋণাত্মক বলেছে, তাই ঐ হিসেবে উভয় করা হয়েছে।

7. k এর মান কত হলে $(k + 2)x^2 - (k + 2)x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হবে? [রা. বো. '২৩]

ক $-2 \leq k < 2$ খ $-2 < k \leq 2$

গ $-2 \leq k \leq 2$ ঘ $-2 < k < 2$

উত্তর: ঘ $-2 < k < 2$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় জটিল হলে, নিশ্চয়ক < 0

$\Rightarrow (k + 2)^2 - 4(k + 2).1 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < k < 2$

8. $2x^2 - kx + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে k এর মান কত? [চ. বো. '২১]

ক $(-4, 4)$ খ $(4, -4)$

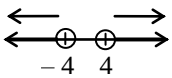
গ $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ ঘ $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

উত্তর: গ $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, $D > 0$

$\Rightarrow k^2 - 16 > 0$

$\therefore k < -4$ ও $k > 4$



অর্থাৎ k এর মান – 4 হতে ছোট ও 4 হতে বড় হবে।

$(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

9. k এর কোন মানের জন্য $(k-1)x^2-(k+2)x+4$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? [কু. বো. '২১]

ক $-10, 2$ খ $10, -2$
গ $2, 10$ ঘ $-2, -10$

উত্তর: গ $2, 10$

ব্যাখ্যা: রাশিটি পূর্ণবর্গ হতে হলে, $D = 0$

$\Rightarrow (k+2)^2 - 16(k-1) = 0$

$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16k + 16 = 0$

$\therefore k = 10, 2$

10. $2x^2 - x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, k এর মান কত? [কু. বো. '২৩]

ক $-\frac{1}{4}$ খ $-\frac{1}{8}$
গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{1}{4}$

উত্তর: গ $\frac{1}{8}$

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় সমান হলে, $D = 0$

$\Rightarrow (-1)^2 - 4 \times 2 \times k = 0$

$\therefore k = \frac{1}{8}$

11. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণ দুইটির মূলগুলো একই হওয়ার শর্ত– [চ. বো. ২৫]

ক $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ খ $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$
গ $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ ঘ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$

উত্তর: ক $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

ব্যাখ্যা: $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের মূলসমূহ একই হবার শর্ত: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

সমীকরণদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবার শর্ত: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$

12. $x^3 + 10x^2 + 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 0 হলে c এর মান কত? [চ. বো. ২৫]

ক -7 খ $\frac{1}{2}$ গ -5 ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: একটি মূল শূন্য হলে ধ্রুবক পদ তথা $c = 0$।

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে যখন $c = 0$ এবং দুটি মূলই অশূন্য হবে যখন $c \neq 0$

13. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূলই অশূন্য হওয়ার শর্ত নিচের কোনটি? [কু. বো. '২৩]

ক $b \neq 0$ খ $c \neq 0$
গ $c = 0$ ঘ $b = c = 0$

উত্তর: খ $c \neq 0$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে যখন $c = 0$ এবং দুটি মূলই অশূন্য হবে যখন $c \neq 0$

14. $2x^2 + bx + 6 = 0$ সমীকরণ মূল দুইটির যোগফল 5 হলে, b এর মান হলো– [ম. বো. '২৩]

ক -10 খ $-\frac{5}{2}$ গ $\frac{5}{2}$ ঘ 10

উত্তর: ক -10

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{2} = 5$

$\therefore b = -10$

Note: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে মূলসহগ সম্পর্ক হতে,

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

মূলদ্বয়ের গুনফল $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

15. k এর মান কত হলে, $x^2 - 5x + k = 0$ এর মূল দুইটি ক্রমিক সংখ্যা হবে? [ব. বো. '২৩]

ক 2 খ 6
গ 30 ঘ 0

উত্তর: খ 6

ব্যাখ্যা: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = 5$

$\therefore \alpha = 2$

এবং $\alpha(\alpha + 1) = k$

$\Rightarrow 2 \times 3 = k$

$\therefore k = 6$

16. $4x^2 + 5x + k = 0$ এর মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত হলে, k এর মান হবে– [চ. বো. '২৩]

ক -4 খ 4 গ $\frac{5}{4}$ ঘ $\frac{-5}{4}$

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: α ও $\frac{1}{\alpha}$ মূল হলে,

$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{k}{4} = 1$

$\therefore k = 4$

17. k এর মান কত হলে $x^2 + (k^2 - 4)x + 2k - 6 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর উল্টা ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে? [ঢা. বো. '১৯]

ক $\pm\sqrt{3}$ খ $\pm\sqrt{5}$
গ $\frac{5}{2}$ ঘ $\frac{7}{2}$

উত্তর: গ $\frac{5}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি মূলদ্বয় $\alpha, -\frac{1}{\alpha}$

এখন মূলদ্বয়ের গুণফল, $-1 = \frac{2k-6}{1}$

$\therefore k = \frac{5}{2}$

18. $3x^2 - px + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটি তিনগুণ হলে, p এর মান কত? [চ. বো. '২১]

ক ± 3 খ $\pm 2\sqrt{2}$
গ ± 6 ঘ ± 8

উত্তর: ঘ ± 8

ব্যাখ্যা: ধরি, সমীকরণের মূলদ্বয় α, 3α

মূলদ্বয়ের গুণফল, $3\alpha.\ \alpha = \frac{4}{3}$

$\therefore \alpha = \pm\frac{2}{3}$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $3\alpha + \alpha = \frac{p}{3}$

$\Rightarrow 4 \times \left(\pm\frac{2}{3}\right) = \frac{p}{3}$

$\therefore p = \pm 8$

19. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$, হলে, a ও b এর মান কত? [ঢা. বো. ২৫]

ক $a = -2, b = 2$ খ $a = 2, b = -2$
গ $a = -1, b = 1$ ঘ $a = 1, b = -1$

উত্তর: ক $a = -2, b = 2$

ব্যাখ্যা: $x^2 + ax + b = 0$ এর একটি মূল $1 + i$ হলে, অপর মূল $1 - i$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $1 + i + 1 - i = -a$

$\therefore a = -2$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $(1 + i)(1 - i) = b$

$\therefore b = 1^2 + 1^2 = 2$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে 20 ও 21 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$\alpha + \beta = 2, \alpha^3 + \beta^3 = 8$ [ম. বো. '২৩]

20. $\sum\alpha^2$ এর মান কত?

ক 0 খ 4
গ 8 ঘ 16

উত্তর: খ 4

ব্যাখ্যা: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8$

$\Rightarrow (2)^3 - 3\alpha\beta.2 = 8$

$\therefore \alpha\beta = 0$

$\sum\alpha^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (2)^2 - 2 \times 0$

$= 4$

21. α, β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হলো–

ক $x^2 + 2 = 0$ খ $x^2 + 2x = 0$
গ $2x^2 - 1 = 0$ ঘ $x^2 - 2x = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 - 2x = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 0 = 0$

$\therefore x^2 - 2x = 0$

22. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে অন্য মূলটি হবে– [য. বো. '১৯]

ক $-\alpha$ খ $\frac{1}{\alpha^2}$
গ $\frac{1}{\alpha}$ ঘ α^3

উত্তর: গ $\frac{1}{\alpha}$

ব্যাখ্যা: ধরি, অপর মূল β

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = 1$

$\therefore \beta = \frac{1}{\alpha}$

23. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\sqrt{-3} - 1$? [চ. বো. ২৫]

ক $x^2 + 4x + 4 = 0$ খ $x^2 - 2x - 4 = 0$
গ $x^2 - 2x + 4 = 0$ ঘ $x^2 + 2x + 4 = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 + 2x + 4 = 0$

ব্যাখ্যা: ধরি, $x = \sqrt{-3} - 1$

$\Rightarrow x + 1 = \sqrt{-3}$

$\Rightarrow (x + 1)^2 = -3$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -3$

$\therefore x^2 + 2x + 4 = 0$

❖ **নিচের তথ্যের আলোকে 24 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\sqrt{-3} + 5i^2$ [ব. বো. '২৩]

24. অপর মূলটি কত?

ক $\sqrt{3} - 5i^2$ খ $\sqrt{3} + 5i^2$
গ $-5 - \sqrt{3}i$ ঘ $5 - \sqrt{3}i$

উত্তর: গ $-5 - \sqrt{3}i$

ব্যাখ্যা: একটি মূল $\sqrt{-3} + 5i^2 = \sqrt{3}i - 5$

$\therefore$ অপর মূল $-5 - \sqrt{3}i$

Note: দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় অনুবন্ধী আকারে থাকে।

$a + ib$ এর অনুবন্ধী মূল $a - ib$

25. $\frac{2}{1-i}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [রা. বো. ২৫]

ক $x^2 - 2x + 2 = 0$ খ $x^2 - 2x - 2 = 0$
গ $x^2 + 2x - 2 = 0$ ঘ $x^2 + 2x + 2 = 0$

উত্তর: ক $x^2 - 2x + 2 = 0$

ব্যাখ্যা: একটি মূল, $\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{1+1} = 1 + i$

$\therefore$ অপরমূল $1 - i$

সমীকরণ, $x^2 - (1 + i + 1 - i)\,x + (1 + i)(1 - i) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

26. যদি $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল হয় তবে অপর মূলটি– [দি. বো. ২৫]

ক $\sqrt{3}-1$ খ $\sqrt{2}+1$
গ $-\sqrt{2}-1$ ঘ $+\sqrt{2}-1$

উত্তর: গ $-\sqrt{2}-1$

ব্যাখ্যা: একটি মূল $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$= -1+\sqrt{2}$

$\therefore$ অপর মূল $-1-\sqrt{2}$

27. $x^2 - 5x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [দি. বো. '২৩]

ক $x^2 - 14x + 45 = 0$ খ $x^2 + 14x + 45 = 0$
গ $x^2 + 4x + 45 = 0$ ঘ $x^2 + 4x - 45 = 0$

উত্তর: ক $x^2 - 14x + 45 = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + 9 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = 5 ; \alpha\beta = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (5+9)x + 5 \times 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0$

28. $2x^2 - ax - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ হলে α, β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [ব. বো. ২৫]

ক $3x^2 + ax - 2 = 0$ খ $3x^2 - ax - 2 = 0$
গ $2x^2 + ax - 3 = 0$ ঘ $2x^2 - ax + 3 = 0$

উত্তর: ক $3x^2 + ax - 2 = 0$

ব্যাখ্যা: x এর স্থলে $\frac{1}{x}$ বসিয়ে পাই,

$2 . \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} - 3 = 0$

$\Rightarrow 2 - ax - 3x^2 = 0$

$\therefore 3x^2 + ax - 2 = 0$

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে 29 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β

29. α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ– [দি. বো. '২২]

ক $9x^2 - 19x + 1 = 0$ খ $9x^2 - 19x - 1 = 0$
গ $9x^2 + 19x - 1 = 0$ ঘ $9x^2 + 19x + 1 = 0$

উত্তর: ক $9x^2 - 19x + 1 = 0$

ব্যাখ্যা: $\alpha = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$; $\beta = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{19}{9}$ এবং $\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{9}$ [Using Calculator]

এখন, α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে,

$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\therefore x^2 - \frac{19x}{9} + \frac{1}{9} = 0$

$\Rightarrow 9x^2 - 19x + 1 = 0$

30. $x^2 + 4x - 2 = 0$ সমীকরণের মূলের চেয়ে 1 বেশি মূলবিশিষ্ট সমীকরণ– [সি. বো. '২৩]

ক $x^2 - 2x - 5 = 0$ খ $x^2 + 2x - 5 = 0$
গ $x^2 - 2x + 5 = 0$ ঘ $x^2 + 2x + 5 = 0$

উত্তর: খ $x^2 + 2x - 5 = 0$

ব্যাখ্যা: 1 বেশি মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের করতে x এর স্থলে $(x-1)$ বসাতে হবে।

$\therefore (x-1)^2 + 4(x-1) - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$

31. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [কু. বো. ২৫]

ক $x^2 + x + 7 = 0$ খ $x^2 - x + 7 = 0$
গ $x^2 + x - 7 = 0$ ঘ $x^2 - x - 7 = 0$

উত্তর: ঘ $x^2 - x - 7 = 0$

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণ হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণে,

x এর স্থলে $x + 2$ বসিয়ে, $(x+2)^2 - 5(x+2) - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 7 = 0$

32. $mx^2 - x + n = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (যেখানে $m \neq 0$) [সি. বো. '২১]

ক $\frac{2mn-1}{m^2}$ খ $\frac{1-2mn}{m^2}$
গ $\frac{2n-1}{m^2}$ ঘ $\frac{1-2n}{m^2}$

উত্তর: খ $\frac{1-2mn}{m^2}$

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = \frac{1}{m}; \alpha\beta = \frac{n}{m}$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \frac{1}{m^2} - \frac{2n}{m}$

$= \frac{1-2mn}{m^2}$

33. $x^2 + ax + b = 0$ এবং $x^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a + b$ = কত? [ব. বো. '২৩]

ক 0 খ -1
গ 1 ঘ ∞

উত্তর: খ -1

ব্যাখ্যা: ধরি, সাধারণ মূল: α

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

বজ্রগুণনের সূত্রানুসারে, $\frac{\alpha^2}{a^2-b^2} = \frac{\alpha}{b-a} = \frac{1}{b-a}$

$\Rightarrow (b-a)^2 = (a^2-b^2)(b-a)$

$\Rightarrow (b-a)^2 = (a+b)(a-b)(b-a)$

$\therefore a + b = -1$

34. $x^2 + bx + a = 0$ এবং $x^2 - 4x + b = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল 3 হলে, a এর মান কোনটি? [দি. বো. '২৩]

ক -18 খ 0
গ 3 ঘ 18

উত্তর: ক -18

ব্যাখ্যা: একটি মূল 3 হলে, $3^2 - 4 \times 3 + b = 0$

$\therefore b = 3$

আবার, $b = 3$ এবং একটি মূল 3 হলে, $3^2 + 3 \times 3 + a = 0$

$\therefore a = -18$

35. $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, তৃতীয় মূল কোনটি? [কু. বো. '১৯]

ক -4 খ -3
গ 3 ঘ 4

উত্তর: গ 3

ব্যাখ্যা: ধরি, মূল তিনটি α, β ও γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

$\therefore \alpha = 3 \quad [\because \beta + \gamma = 0]$

Note: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে,

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

36. $x^3 - bx^2 + cx - a = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নিচের কোনটি? [ঢা. বো. '১৯]

ক $-x^3 + bx^2 - cx + a = 0$
খ $ax^3 + cx^2 - bx + 1 = 0$
গ $x^3 + bx^2 + cx + a = 0$
ঘ $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

উত্তর: ঘ $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

ব্যাখ্যা: x এর স্থলে $\frac{1}{x}$ বসালে বিপরীত মূলবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{c}{x} - a = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} - a = 0$

$\therefore ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

37. $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূল– [য. বো. ২৫]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$
গ 1 ঘ 2

উত্তর: খ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সমীকরণটি সমাধান করে,

$x = \frac{1}{2}, 2 + i, 2 - i$

$\therefore$ বাস্তব মূল $\frac{1}{2}$

38. কী শর্তে $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে? [য. বো. '২১]

ক $pr = q$ খ $pq + r = 0$
গ $qr = p$ ঘ $r = p$

উত্তর: খ $pq + r = 0$

ব্যাখ্যা: ধরি, মূলত্রয় $\alpha, -\alpha, \beta$

$\alpha + (-\alpha) + \beta = -p$

$\therefore \beta = -p$

এখন যেহেতু β উক্ত সমীকরণের একটি মূল। তাই β এর মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

$(-p)^3 + p(-p)^2 + q(-p) - r = 0$

$\Rightarrow -p^3 + p^3 - pq - r = 0$

$\therefore pq + r = 0$

39. $x^3 - px^2 + q = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে $\Sigma\alpha^2$ এর মান কত? [দি. বো. '২১]

ক p^2 খ $p^2 - 2q$
গ $-p^2$ ঘ $-q$

উত্তর: ক p^2

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = p$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$; $\alpha\beta\gamma = -q$

$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= p^2$

40. $3x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = ?$ [ঢা. বো. '২২]

ক -1 খ 0
গ $\frac{1}{3}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = 0$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$; $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$= 0 + 3 \times \frac{1}{3}$

$= 1$

41. $3x^3 + 2x^2 - 7 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\Sigma\alpha\beta$ এর মান কোনটি? [রা. বো. ২৫]

ক -7 খ $-\frac{7}{3}$
গ $-\frac{2}{3}$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $3x^3 + 2x^2 - 7 = 0$

$\Rightarrow 3x^3 + 2x^2 + 0.x - 7 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে,

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{0}{3} = 0$

42. $6x^3 + 3x^2 + 2 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলত্রয় a, b ও c হলে, Σa^2b^2 এর মান কোনটি? [সি. বো. '২১]

ক $-\frac{1}{3}$ খ 3

গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{3}{4}$

উত্তর: ক $-\frac{1}{3}$

ব্যাখ্যা: $a + b + c = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$ab + bc + ca = 0$; $abc = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\Sigma a^2b^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$

$= (ab + bc + ca)^2 - 2(ab.bc + bc.ca + ca.ab)$

$= 0 - 2abc(a + b + c)$

$= -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{3}$

43. $2x^3 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r হলে $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ এর মান কত? [কু. বো. '২১]

ক $-\frac{3}{5}$ খ $\frac{3}{5}$

গ $-\frac{3}{2}$ ঘ $\frac{2}{5}$

উত্তর: ক $-\frac{3}{5}$

ব্যাখ্যা: $p + q + r = 0$; $pq + qr + rp = -\frac{3}{2}$; $pqr = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{qr + pr + pq}{pqr} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$

44. k এর মান কত হলে, $x^2 + 7x + 3 + k = 0$ সমীকরণের উৎপাদক $x + 3$ হবে? [রা. বো. '২৩]

ক -33 খ -9

গ 9 ঘ 33

উত্তর: গ 9

ব্যাখ্যা: উৎপাদক $x + 3$ হলে একটি মূল -3 হবে।

$\therefore 9 - 21 + 3 + k = 0$

$\Rightarrow k - 9 = 0$

$\therefore k = 9$

45. $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [য. বো. '১৯]

ক 1 খ 3

গ -11 ঘ 0

উত্তর: খ 3

ব্যাখ্যা: $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ রাশিতে x এর স্থলে 1 বসালেই ভাগশেষ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ ভাগশেষ $f(1) = 4 + 2 + 3 - 6 = 3$

❖ **উদ্দীপকের আলোকে 46 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।**

$f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

46. f(x) এর সর্বনিম্ন মান কত? [ঢা. বো. ২৫]

ক $\frac{3}{4}$ খ $-\frac{3}{4}$

গ $\frac{5}{4}$ ঘ $-\frac{5}{4}$

উত্তর: ক $\frac{3}{4}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

সর্বনিম্ন মান, $= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{(-2)^2 - 4 \times 4 \times 1}{4 \times 4}$

$= -\frac{4 - 16}{16}$

$= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

47. x এর মান বাস্তব হলে $-4x^2 + 4ax + b^2$ এর সর্বোচ্চ মান– [য. বো. '২১]

ক $a^2 + b^2$ খ $a + b$

গ $a^2 - b^2$ ঘ $a - b$

উত্তর: ক $a^2 + b^2$

ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{(4a)^2 - 4.(-4).b^2}{4.(-4)} = -\frac{16a^2 + 16b^2}{-16} = a^2 + b^2$

Note: $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত রাশির সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান হবে

$= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

x^2 এর সহগ ঋণাত্মক হলে সর্বোচ্চ মান থাকবে এবং x^2 এর সহগ ধনাত্মক হলে সর্বনিম্ন মান থাকবে।

❖ **উদ্দীপকটির আলোকে 48 ও 49 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$f(x) = 1 + 3x - 2x^2$

48. f(x) এর গরিষ্ঠ মান কত? [চ. বো. '২১]

ক $-\frac{17}{8}$ খ $-\frac{1}{8}$ গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{17}{8}$

উত্তর: ঘ $\frac{17}{8}$

ব্যাখ্যা: গরিষ্ঠ মান $= -\frac{D}{4a} = -\frac{3^2 - 4.(-2).1}{4.(-2)} = \frac{17}{8}$

49. f(x) = 0 এর মূলদ্বয় α ও β হলে – α ও – β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [চ. বো. '২১]

ক $2x^2 - 3x + 1 = 0$ খ $2x^2 + 3x - 1 = 0$

গ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ঘ $2x^2 + 3x + 1 = 0$

উত্তর: খ $2x^2 + 3x - 1 = 0$

ব্যাখ্যা: $-\alpha$ ও $-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত সমীকরণে x এর স্থানে $-x$ বসাতে হবে।

$1 + 3.(-x) - 2.(-x)^2 = 0$

$\Rightarrow -2x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad \therefore 2x^2 + 3x - 1 = 0$

50. f(x) = 0 সমীকরণের মূলত্রয় 1, – 1, 3 হলে f(3x) = 0 এর মূলত্রয় কোনটি হবে? [কু. বো. ২৫]

ক $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1$ খ $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1$ গ $3, -3, 9$ ঘ $-3, 3, -9$

উত্তর: খ $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1$

ব্যাখ্যা: $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$\therefore f(3x) = (3x-1)(3x+1)(3x-3) = 0$

$\therefore$ মূলত্রয়: $x = \frac{1}{3}; x = -\frac{1}{3}; x = 1$

51. $x^2 - 8x + c = 0$ এর মূলদ্বয়– [রা. বো. '২২]

(i) সমান হবে যদি c = 8 হয়

(ii) জটিল হবে যদি c > 16 হয়

(iii) বাস্তব হবে যদি $c \le 16$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সমান হলে, $b^2 = 4ac$

$\Rightarrow 64 = 4 \times 1 \times c \therefore c = 16$

(ii) জটিল হলে, $b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow 64 - 4c < 0 \therefore c > 16$

(iii) বাস্তব হলে $b^2 - 4ac \ge 0 \Rightarrow c \le 16$

52. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় অমূলদ ও অসমান হলে তার পৃথায়ক– [সি. বো. ২৫]

i. পূর্ণবর্গ নয়

ii. ধনাত্মক

iii. ঋণাত্মক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় বাস্তব অমূলদ ও অসমান হলে নিশ্চায়ক ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

53. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হলে পৃথায়ক হবে– [সি. বো. '২২]

(i) পূর্ণবর্গ

(ii) ধনাত্মক সংখ্যা

(iii) ঋণাত্মক সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: শর্ত গুলো ভালো করে মনে রাখবা।

54. $x^2 - kx + 2 = 0$, সমীকরণের একটি মূল 3 হলে– [ঢা. বো. '২২]

(i) অপর মূল $\frac{2}{3}$

(ii) k এর মান $\frac{11}{3}$

(iii) প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক = 7

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{2}{1}$; অপর মূল α হলে,

$3\alpha = 2 \therefore \alpha = \frac{2}{3}$

(ii) একটি মূল 3 মানে 3 দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে $3^2 - 3k + 2 = 0$;

$k = \frac{11}{3}$

(iii) $x^2 - \frac{11}{3}x + 2 = 0$

$D = \left(\frac{11}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 2 = \frac{49}{9} \neq 7$

55. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে– [ঢা. বো. '২২]

(i) $\alpha + \beta = p$

(ii) $\alpha\beta = pq$

(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q}$

$\Rightarrow \frac{x-p-x}{x(x-p)} = \frac{1}{q}$

$\Rightarrow x^2 - px + pq = 0$

(i) মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = p$

(ii) মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = pq$

(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$

56. $x^2 - 5x + 6 = 0$ এবং $x^2 + x - 12 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের– [ম. বো. '২১]

(i) প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ

(ii) সাধারণ মূল 3

(iii) প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + 6 = 0$ এর মূলদ্বয় 2 ও 3

$x^2 + x - 12 = 0$ এর মূলদ্বয় 3 ও -4

অতএব, সমীকরণদ্বয়ের মূলগুলি মূলদ, সাধারণ মূল 3 এবং প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5

57. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে– [চ. বো. '২৩]

(i) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $-\frac{2}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{1}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) ক্যালকুলেটর দিয়ে সমীকরণ সমাধান করে মূলগুলো চেক করো।

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $\frac{-b}{a} = \frac{-2}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

58. একটি ত্রিঘাত সমীকরণে– [ব. বো. ২৫]

i. তিনটি মূল বাস্তব হতে পারে

ii. দুইটি মূল বাস্তব হলে অপরটি জটিল

iii. একটি মূল বাস্তব হলে অপর দুইটি জটিল

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: প্রশ্নে উল্লেখিত 'দ্বিঘাত' সমীকরণ এর জন্য অপশনে সঠিক উত্তর নেই।

কিন্তু 'ত্রিঘাত' সমীকরণ হলে সঠিক উত্তর (i) ও (iii)

কারণ জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় থাকে।

59. $x^3 - \frac{1}{3}x - 15 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে– [কু. বো. '২২]

(i) $\Sigma\alpha = 0$

(ii) $\Sigma\alpha\beta = -\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta\gamma = 15$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $\sum\alpha = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

(ii) $\sum\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = 15$

60. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ একটি বহুপদী হলে [ম. বো. '২৩]

(i) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল 4টি

(ii) $f(x) = 0$ এর একটি মূল 2

(iii) $x - 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) ও (ii) Using Calculator

(iii) $x - 1 \neq f(x)$ এর উৎপাদক

(i) এর চারটি মূল পুনরাবৃত্তিসহ ধরতে হবে।

Prepared By

Abhi Datta Tushar

ME'15, BUET

CEO, ACS Group

Managing Director, Rhombus Publications

Founder: Rhombus Parallel Science Hub

https://www.rhombuspublications.com

https://aparsclassroom.com/shop/abhi/